[1] (略解)

(1) $P_1:\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_2:\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4 \\ -2a-2b \end{pmatrix}$

よって

$$\begin{cases} \dfrac{a+a^2-4}{2}=1 \\ \dfrac{-2-2a-2b}{2}=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$$

(2) (1)より

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c+2 \\ -2 \end{pmatrix}$より　$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2c \\ 2-2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c+2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $c=2$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PP_1}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より

$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ …①を示す.

$n=1$ のとき　$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 成立

$n=k$ (自然数)のとき成り立つとすると

$$A^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

このとき

$A^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=A\cdot A^k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^k A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-2)^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成立.

以上よりすべての自然数n において①は成立.

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} 4s+t \\ -2s-2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$より　$s=\dfrac{1}{3}$, $t=-\dfrac{1}{3}$

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A^n\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{3}A^n\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}(-2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-(-2)^n \\ -2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

[2]

(1) $f(x)=g(x)$ を解くと、$2x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

$\therefore$ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標は, $(0\,,0)\,,\left(-\dfrac{2}{3}\pi\,,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\right),\left(\dfrac{\pi}{3}\,,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

(2) A$\left(\dfrac{\pi}{3}\,,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

$g'(x)=\sqrt{3}(\cos x-x\sin x)$ より, $g'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-\pi}{2}$

$$h(x)=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}$$

(3) $I(x)=h(x)-g(x)$ とおくと

$$I'(x)=\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}-\sqrt{3}(\cos x-x\sin x)$$

$$I''(x)=\sqrt{3}(2\sin x+x\cos x)$$

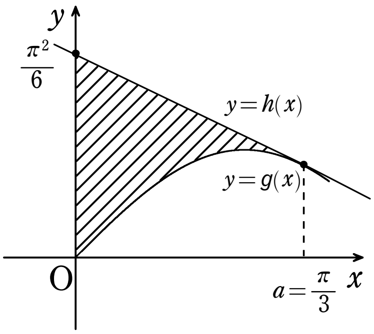
$0\leqq x\leqq a=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, $I''(x)\geqq 0$ なので$I'(x)$ は単調増加

$I'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ なので $I'(x)\leqq 0$

$\therefore$ $I(x)$ は単調減少し, $I\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ なので, $I(x)\geqq 0$

$\therefore$ $0\leqq x\leqq a$ のとき , $h(x)\geqq g(x)$ が成り立つ.

(4)



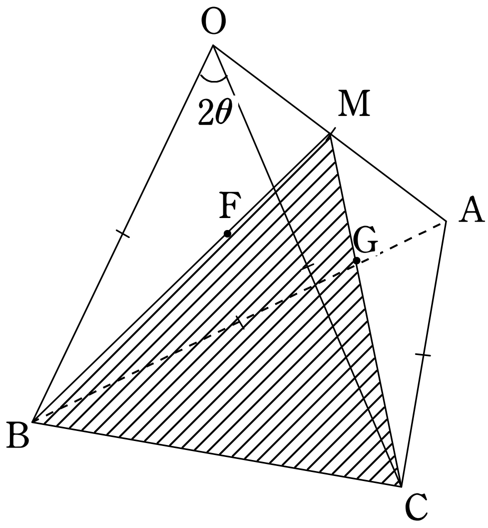
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{h(x)-g(x)\}dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left\{\left[\sqrt{3}x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\sin x\,dx\right\}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-\pi)\pi^2}{36}+\frac{\pi^3}{18}-\frac{\pi}{2}+\left[-\sqrt{3}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2+\frac{\pi^3}{36}-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[3]



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{FG}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3) △OBC について

$\mathrm{BC}=2\,\mathrm{BD}=2\sin\theta$

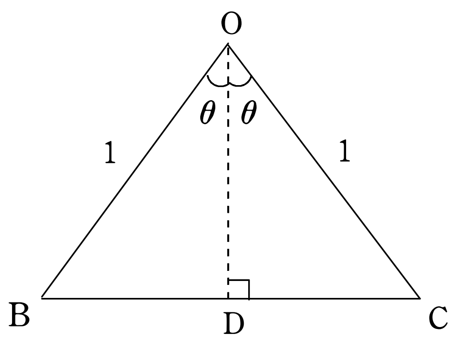
$\mathrm{MB}=\mathrm{MC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

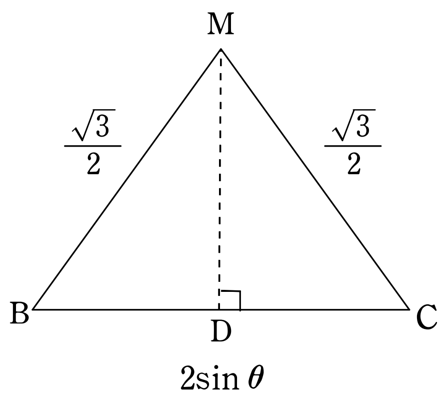
△ MBD で三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{MD}&=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-(\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}\end{aligned}$$

∴ △MBC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{MD}\\&=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times\sqrt{\frac{3}{4}-\sin^2\theta}\\&=\frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{3-4\sin^2\theta}\end{aligned}$$





［ 4 ］（略解）

$\alpha > 1$

$$a_1 = \alpha\ ,\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} = \sqrt{2 - \frac{2}{a_n+1}} \quad \cdots ①$$

(1) 数学的帰納法で示す.

（ i ） $n=1$ のとき　$a_1 = \alpha > 1$ より成立

（ ii ） $n=k$ のとき　$a_k > 1$ と仮定

このとき　$2 - \dfrac{2}{a_k+1} > 1$

①より　$a_{k+1} > 1$

$n=k+1$ のときも成立

（ i ）（ ii ）より　$a_n > 1$ は成立

(2) （右辺）−（左辺）$= \dfrac{1}{2}(x-1) - (\sqrt{x}-1)$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2 \geqq 0$$

よって、示された.（等号成立は$x=1$ のとき）

(3) ①より

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} - 1 \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1} - 1\right) \quad (\because (2)より)$$

$$= \frac{1}{2(a_n+1)}(a_n - 1)$$

$$< \frac{1}{2(1+1)}(a_n - 1) = \frac{1}{4}(a_n - 1) \quad (\because (1)より)$$

$$a_n - 1 < \frac{1}{4}(a_{n-1} - 1) < \left(\frac{1}{4}\right)^2 (a_{n-2} - 1) < \cdots\cdots < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (a_1 - 1)$$

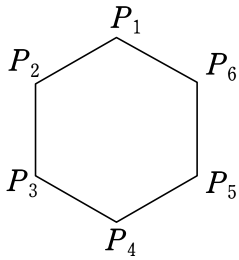
$n=1$ のとき等号が成立.

$$\therefore\quad a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1)$$

[5]

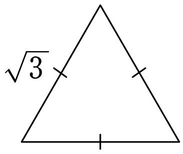
(1)　P_2～P_6から異なる2 点を取ればよいので、

$$\frac{5\times4}{6^2}=\frac{5}{9}$$

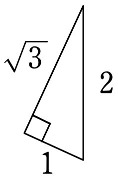


(2)　考えられる三角形は

の二等辺三角形$\left(S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$　…　①



の正三角形　$\left(S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$　…　②



の直角三角形　$\left(S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　…　③

の3 種類である.

Sが最大となるのは② のときであり, $\triangle P_1P_3P_5$ のときであるから

$$\frac{2}{6^2}=\frac{1}{18}$$

(3)　①は$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1P_2P_6$，$\triangle P_1P_6P_5$ の3種類より確率は

$$\frac{3\times2}{6^2}=\frac{1}{6}$$

③はP_1P_4 を斜辺とする4 個

P_2P_5 を斜辺とする1 個

P_3P_6 を斜辺とする1 個　であるから確率は

$$\frac{6\times2}{6^2}=\frac{1}{3}$$

よって期待値は

$$\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{18}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{6}{18}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$