[1]

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を解いて

$\therefore\quad P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2-(a+2)A+(a^2+a-2)E=0$

$A^2=kE$ を用いて　$(a+2)A=(k+a^2+a-2)E$

$A \fallingdotseq kE$ より　$a+2=0$　かつ　$k+a^2+a-2=0$

$\therefore\quad a=-2,\ k=0$

(3) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} ax+(2-a)y+2b \\ (1+a)x+2y+b \end{pmatrix}$

どんな $P(x, y)$ に対しても　$x'=0,\ y'=0$ とならないための条件は，

$\begin{cases} ax+(2-a)y+2b=0 \\ (1+a)x+2y+b=0 \end{cases}$ を満たす解 (x, y) が存在しない，

すなわち，2 直線が平行かつ一致しないことである。

平行となるとき，$2a-(2-a)(1+a)=0$　　$\therefore\quad a=-2,\ 1$

$a=-2$ のとき，2 直線が一致し，不適

$a=1$ のとき，$\begin{cases} x+y+2b=0 \\ 2x+2y+b=0 \end{cases}$ より，$b \fallingdotseq 0$ であればよい。

以上より求める条件は　$a=1,\ b \fallingdotseq 0$

[2]

(1) 自然数 m，n が存在すると仮定して，$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ より，$2^m = 3^n$

左辺が偶数，右辺が奇数となり矛盾。　よって存在しない

(2) 小数部分が等しいと仮定すると，

$p\log_2 3 - q\log_2 3 = l$（$l$ は整数）と表せる。

$p \fallingdotseq q$ より，$\log_2 3 = \dfrac{l}{p-q}$ となり，(1) に矛盾。　$\therefore$　等しくない

(3) $8<9$ より，　$2^3<3^2$　　$\therefore\quad 3<2\log_2 3$　　$1.5<\log_2 3$

$243<256$ より，$3^5<2^8$　　$\therefore\quad 5\log_2 3<8$　　$\log_2 3<1.6$

よって小数第 1 位は 5

[3]

(1) $f(0)=a$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{2}-b+\dfrac{c}{2}$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{2}+b+\dfrac{c}{2}$ が一致することが必要

$\therefore\quad a=c$ かつ $b=0$　（逆に，このとき $f(x)$ は定数）

(2) 変形して，$g(x)=\sin 2x+\dfrac{3}{2}\cos 2x$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2x+\alpha)\qquad \left(\text{ただし}\quad \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$　のとき　$-\dfrac{\pi}{2}+\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$

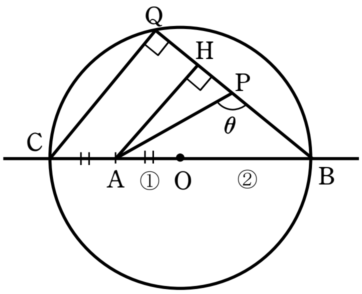
$2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大

$$\therefore\quad \begin{cases}\cos 2\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\\ \sin 2\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}$$

(3) $\displaystyle\int_0^\theta g(x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x\right]_0^\theta$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 2\theta-1)+\frac{3}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{2}$$

[4]



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$　$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\dfrac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|<|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$$\left|\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|<\left|\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})\right|$$

2乗して

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2<|2(\vec{b}-\vec{a})|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}<\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2$

$\therefore$　$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$

(3) A から BQ に下した垂線の足を H とする。

△APH より　$\mathrm{PH}=|\vec{a}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\vec{a}|\cos\theta$

$\mathrm{BH}:\mathrm{HQ}=3:1$ より

$\mathrm{HQ}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BH}=\dfrac{1}{3}(|\vec{b}|+\mathrm{PH})=\dfrac{1}{3}(|\vec{b}|-|\vec{a}|\cos\theta)$

$\therefore$　$\mathrm{PQ}=\mathrm{PH}+\mathrm{HQ}=\dfrac{|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta}{3}$

(4) $\triangle\mathrm{QAB}:\triangle\mathrm{POB}=3:1$ より,

$3\,\mathrm{BQ}:2\,\mathrm{BP}=3:1$

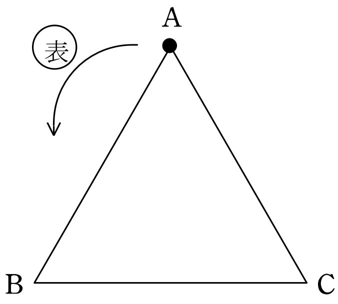
$\therefore$　$\mathrm{BQ}=2\,\mathrm{BP}$

P は BQ の中点より　$\mathrm{PH}=1$

$\mathrm{AH}=\sqrt{|\vec{a}|^2-\mathrm{PH}^2}=2\sqrt{2}$

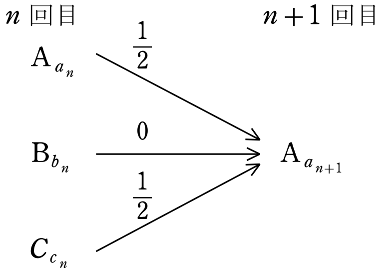
$\therefore$　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

[5]



(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$

(2)



$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$

同様にして　　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$

$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

$a_2=\dfrac{1}{4}$，$b_2=\dfrac{1}{2}$，$c_2=\dfrac{1}{4}$，$a_3=\dfrac{1}{4}$，$b_3=\dfrac{3}{8}$，$c_3=\dfrac{3}{8}$

(3)　(2) より，
$$\begin{cases} a_{n+1}-b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(b_n-c_n) \\ b_{n+1}-c_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(c_n-a_n) \\ c_{n+1}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_n-b_n) \end{cases}$$

よって，n で一致していれば，$n+1$ のときにも 2 つの値が一致する。
(2) と合わせて，帰納的に証明された。

(4)　a_n，b_n，c_n の組は，p_n，p_n，$1-2p_n$ の組に一致する。

(2) より，$1-2p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}p_n$ とできるので，

これを解いて　$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$