〔 1 〕《解答》

(1) $P_3(p,\ q)$ とおくと，条件より，

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} & \cdots ① \\ A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} & \cdots ② \\ A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \cdots ③ \end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ より，成分計算して，

①より $a=0$ ，$c=3$

②より　$p=3b$ ，$q=3d$

よって，③より

$$\begin{pmatrix}0 & b\\ 3 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3b\\ 3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}3bd=1\\ 9b+3d^2=0\end{cases}$$

b 消去して　$d^3=-1$

$\therefore\quad d=-1$，$b=-\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2+A+E=0$

両辺 $(A-E)$ を左からかけて　$A^3-E=0$　　$\therefore\quad A^3=E$

よって，k を自然数として

$n=3k$ のとき　$A^n=E$

$$n=3k-1 \text{ のとき}\quad A^n=A^{3(k-1)+2}=A^2=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{3}\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$n=3k-2 \text{ のとき}\quad A^n=A^{3(k-1)+1}=A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

(3) $$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3}\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\sin\theta\\ 3\cos\theta-\sin\theta\end{pmatrix}$$

よって，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=-\frac{1}{3}\sin\theta\cos\theta+\sin\theta(3\cos\theta-\sin\theta)\\ &=\frac{8}{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\\ &=\frac{4}{3}\sin2\theta-\frac{1-\cos2\theta}{2}\\ &=\frac{\sqrt{73}}{6}\sin(2\theta+\alpha)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad -\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}\leqq\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}$$

〔 2 〕《解答》

(1)　$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$

$=(x-a)(x^2-2px+1)$ ($\because$ $P(a)=0$)

(2)　$P(3)=10-6p$ より，

$(3-a)(10-6p)=10-6p$

$(10-6p)(a-2)=0$

実数解は a のみから，

$x^2-2px+1=0$

の判別式 $D_1/4=p^2-1<0$　　$\therefore$　$-1<p<1$

もしくは　$x=3$ を重解にもつ

このとき　$9-6p+1=0$

$p=\dfrac{5}{3}$ だが重解をもたないので不適

以上から　$a=2$

(3)　$P(x)=x^3-2(p+1)x^2+(4p+1)x-2$

$P'(x)=3x^2-4(p+1)x+4p+1$

極値をもたない為には

$P'(x)=0$ の判別式

$D/4=4(p+1)^2-3(4p+1)\leqq 0$

$4p^2-4p+1\leqq 0$

$(2p-1)^2\leqq 0$

$\therefore$　$p=\dfrac{1}{2}$

〔 3 〕《解答》

(1)　$xe^x=tx$

$x(e^x-t)=0$

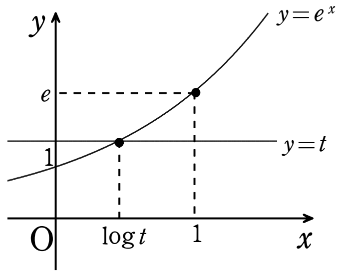
$x=0$ または $e^x=t$

(i)　$1<t\leqq e$ のとき

$x=0$，$\log t$

(ii)　$e<t$ のとき

$x=0$



(2)　$S(t)=\displaystyle\int_0^1 x|e^x-t|\,dx$

(i)　$1<t\leqq e$ のとき

$S(t)=\displaystyle\int_0^{\log t}(tx-xe^x)dx+\int_{\log t}^1(xe^x-tx)dx$

ここで，$\displaystyle\int xe^x dx=(x-1)e^x+C$ (C は積分定数) より

$S(t)=\left[\dfrac{1}{2}tx^2-(x-1)e^x\right]_0^{\log t}+\left[(x-1)e^x-\dfrac{1}{2}tx^2\right]_{\log t}^1$

$=t(\log t)^2-2t\log t+\dfrac{3}{2}t-1$

(ii)　$e<t$ のとき

$S(t)=\displaystyle\int_0^1(tx-xe^x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}tx^2-(x-1)e^x\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{2}t-1$

(3)　$1<t\leqq e$ のとき

$S'(t)=(\log t)^2-\dfrac{1}{2}$

$S'(t)=0$ を解くと，　$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

増減表より，

$S'(t)$ を最小にする t の値は

$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

t	1		$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$		e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	$+$
$S(t)$		↘		↗	↗

〔 4 〕《解答》

(1)　勝者が 3 人となるのは，3 人とも同じ得点となるとき

$$P_n(3)=\frac{n\cdot 1\cdot 1}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2)　勝者が 2 人となるとき

勝者 2 人の選び方は　${}_3\mathrm{C}_2$

異なる 2 数の選び方は　${}_3\mathrm{C}_2$

よって，$P_3(2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

(3)　勝者が 1 人で，l で勝つとき

$${}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1\times(l-1)^2}{n^3}=\frac{3(l-1)^2}{n^3}$$

よって，$P_n(1)=\displaystyle\sum_{l=2}^{n}\frac{3(l-1)^2}{n^3}$

$$=\frac{3}{n^3}\sum_{l=1}^{n-1}l^2$$

$$=\frac{3}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}$$

(4)　(3) より $\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\geqq 0.9$

$5(n-1)(2n-1)\geqq 9n^2$

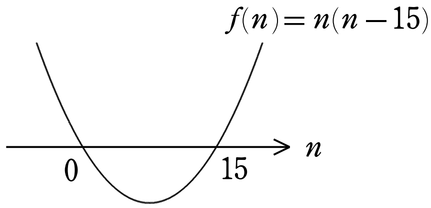
$n^2-15n+5\geqq 0$

$n(n-15)\geqq -5$

$f(n)=n(n-15)$ とすると，

$f(1)=f(14)=-14$ ，$f(15)=0$ となるから，

最小の n は $n=15$



〔 5 〕《解答》

(1) x，y が A に属するとき

$$\begin{cases} x=4k+1 \\ y=4l+1 \end{cases} \quad (k\ ,\ l \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

とおくと，

$$xy=(4k+1)(4l+1)$$
$$=4(4kl+k+l)+1$$

よって，xy も A に属する。

(2) m は偶数より，$m=2n$ とおく

（ n は 0 以上の整数 ）

このとき，

$$3^m=3^{2n}=9^n=(8+1)^n$$

2 項定理を用いて

$$3^m=8^n+{}_n\mathrm{C}_1\,8^{n-1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}8+1$$

右辺の 1 を除く項は 4 で割り切れる。

よって，3^m は A に属する。

(3) $3^m7^n=(4-1)^m(8-1)^n$

2 項定理を用いて

$$(4-1)^m=4^m+{}_m\mathrm{C}_1\,4^{m-1}(-1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}4\,(-1)^{m-1}+(-1)^m$$
$$(8-1)^n=8^n+{}_n\mathrm{C}_1\,8^{n-1}(-1)+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\,8\,(-1)^{n-1}+(-1)^n$$

と表されるので，

3^m7^n を 4 で割った余りは

$$(-1)^m\times(-1)^n=(-1)^{m+n}$$

よって，$m+n$ が偶数のとき，3^m7^n を 4 で割った余りは 1 となり，A に属する。

また，$m+n$ が奇数のとき，3^m7^n を 4 で割った余りは 3 となり，A に属さない。

(4) (3) より，$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち，A に属するのは，

　ｉ） 3 の偶数乗と 7 の偶数乗の積

　ⅱ） 3 の奇数乗と 7 の奇数乗の積

i)，ii) の和をそれぞれ S_1，S_2 とすると，

$$\begin{aligned} S_1= &\ 1\cdot1+1\cdot7^2+\cdots+1\cdot7^{2n} \\ &+3^2\cdot1+3^2\cdot7^2+\cdots+3^2\cdot7^{2n} \\ &+\cdots \\ &+3^{2m}\cdot1+3^{2m}\cdot7^2+\cdots+3^{2m}\cdot7^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2= &\ 3\cdot7+3\cdot7^3+\cdots+3\cdot7^{2n+1} \\ &+3^3\cdot7+3^3\cdot7^3+\cdots+3^3\cdot7^{2n+1} \\ &+\cdots \\ &+3^{2m+1}\cdot7+3^{2m+1}\cdot7^3+\cdots+3^{2m+1}\cdot7^{2n+1} \end{aligned}$$

比較して，$S_2=21S_1$ と表されるので，

全体の和

$$\begin{aligned} S&=S_1+S_2=22S_1 \\ &=22(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n}) \\ &=22\times\frac{9^{m+1}-1}{9-1}\,\frac{49^{n+1}-1}{49-1} \\ &=\frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1) \end{aligned}$$